

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ТГПУ)

УТВЕРЖДАЮ
Декан физико-математического факультета
А. Н. Макаренко
_____ 20 11 г.



ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ
ОПД.В.04. «Тензорный анализ»

Направление: 050200.62 **Физико – математическое образование**

Профессионально-образовательный профиль: Физика

Степень(квалификация) выпускника - «Бакалавр физико-математического образования (физика)»

Пояснительная записка

Тензорный анализ дает мощные методы исследования скалярных, векторных (тензорных) полей, основанные на применении методов и понятий алгебры, а также дифференциального и интегрального исчисления. Векторный и тензорный анализ по праву является одним из ключевых элементов математического аппарата современной физики.

1. Цели и задачи дисциплины

Целью курса «Тензорный анализ» является изучение теории скалярных, векторных полей с позиций тензорного анализа, освоение технологий работы с тензорными объектами и операциями векторного анализа, освоение основополагающей идеи инвариантности величин, представляющих физические объекты, их трансформационных свойств.

2. Требования к уровню освоения содержания дисциплины:

Воспитание у студентов математической культуры включает в себя ясное понимание необходимости математической составляющей в общей подготовке, выработку представлений о роли и месте математики и конкретно векторного и тензорного анализа, умение логически мыслить, оперировать с абстрактными объектами и быть корректным в употреблении математических понятий и символов для выражения количественных и качественных отношений.

Освоение студентами понятий и методов дифференциального и интегрального исчисления для функций одной и нескольких переменных позволяет систематически изложить теорию векторнозначных функций. Здесь используются также знания, полученные студентами в курсе линейной алгебры. Вводится фундаментальное понятие тензора, строжайшим является требование инвариантности теории относительно вращений декартовой системы координат. Это позволяет наиболее естественным и строгим образом определить алгебраические и дифференциальные операции векторного анализа, развить соответствующую технику вычислений, дать регулярное изложение интегральных соотношений векторного анализа.

В результате изучения дисциплины «Тензорный анализ» студент должен знать:

основные понятия и методы тензорного анализа,
физический смысл математических понятий, изучаемых в рамках курса;

должен уметь:

применять методы тензорного анализа для решения задач физики.

3. Объем дисциплины в часах и виды учебной работы:

Вид учебной работы	Трудоемкость (час)	Распределение по семестрам (час)
	Всего 120	3
Аудиторные занятия	54	54
Лекции	36	36
Практические занятия	18	18
Семинары		
Лабораторные работы		
Другие виды аудиторных работ		
Другие виды работ		
Самостоятельная работа	66	66
Курсовой проект (работа)		
Расчетно-графические работы		
Реферат		
Расчетно-графические работы		
Формы текущего контроля		Зачет

4. Содержание дисциплины

4.1 Разделы учебной дисциплины (тематический план)

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (Темы)	Виды учебной работы (часы) (в соответствии с учебным планом)		
		лекции	Практические (семинары)	самостоятельные
1	Векторная алгебра и элементы дифференциальной геометрии	4	2	8
2	Скалярные и векторные поля	8	4	10
3	Специальные виды полей	4	2	10
4	Криволинейные системы координат	4	2	10
5	Дифференциальные операции в криволинейных координатах	4	2	10
6	Тензорная алгебра	8	4	10
7	Приложения тензорного анализа	4	2	8

4.2 Содержание разделов дисциплины:

1. Векторная алгебра и элементы дифференциальной геометрии: скалярные и векторные величины; вектор и его характеристики, системы координат, базис в двух и трехмерном пространстве, координаты вектора; разложение вектора по базису; операции сложения и умножения векторов (скалярное, векторное и диадное произведения); умножение трех векторов и более; понятие векторной функции; зависимость вектора от скалярного аргумента; радиус-вектор точки в пространстве; годограф радиус-вектора; дифференцирование векторных функций; дифференциал радиус-вектора.

2. Скалярные и векторные поля: скалярные и векторные поля; линии уровня и поверхности уровня скалярного поля; градиент скалярного поля; символический дифференциальный оператор Гамильтона; скорость изменения скалярного поля в заданном направлении; максимальная скорость изменения скалярного поля; направление вектора градиента скалярного поля; свойства оператора Гамильтона; оператор Гамильтона применительно к сумме и произведению скалярных функций, понятие векторного поля; векторные линии (линии тока); поток векторного поля через поверхность; физический смысл потока вектора через замкнутую поверхность; дивергенция векторного поля; формула Остроградского, связь поверхностного и объемного интегралов; циркуляция векторного поля; теорема Стокса связь интегралов по поверхности и замкнутому контуру; понятие ротора векторного поля и его физический смысл; обобщенные формулы Стокса и Остроградского; скалярные, векторные и диадные операции с оператором Гамильтона.

3. Специальные виды полей: потенциальные - безвихревые, консервативные, центральные, соленоидальные, лапласовы поля; свойства соленоидальных полей, основанные на понятии векторной трубки; примеры Лапласовых полей; краевые задачи.

4. Криволинейные системы координат: понятие криволинейных систем координат; цилиндрическая и сферическая системы координат; базис, взаимный базис, связь базисов; координатные линии и поверхности. Метрический тензор и его представление с помощью диадиков. Изменение метрического тензора при переходе к новой системе координат. Тензоры произвольного ранга и произвольной ко- и контрвариантности. Преобразование тензоров при переходе от старых систем координат к новым системам координат.

5. Дифференциальные операции в криволинейных координатах: дифференцирование базисных векторов; символы Кристоффеля первого и второго рода; вычисление символов Кристоффеля для цилиндрической и сферической систем координат; пример вычисления производной от вектор функции в цилиндрической системе координат; ковариантное дифференцирование и его свойства; ковариантная производная метрического тензора и тензора Леви -Чевита.

6. Тензорная алгебра: тензоры нулевого и первого ранга; тензоры произвольного ранга и произвольной валентности; понятие жонглирования индексами тензора; операции сложения тензоров; скалярное, векторное и диадное умножения и связанное с этим понятие свертки тензора; понятия транспонирования, симметрирования и альтернирования тензоров; декартовы тензоры; тензоры второго ранга; операции сложения, умножения, транспонирования, симметрирования для тензоров второго ранга; инварианты тензора первого ранга; инварианты тензора второго ранга; приведение тензора второго ранга к главным осям; теорема Кейли - Гамильтона и степени тензоров.

7. Приложения тензорного анализа: появление некоторых тензоров в механике деформируемого твердого тела и в гидромеханике; тензор напряжений, тензор деформаций, тензор скоростей деформаций; понятие шаровой и девиаторной частей тензоров.

5. Лабораторный практикум

Не предусмотрен.

6. Учебно-методическое обеспечение дисциплины:

6.1 Рекомендуемая литература:

а) основная литература

1. Сокольников С.И. Тензорный анализ: теория и применение в механике сплошных сред. / С.И. Сокольников. - М.: КомКнига, 2007.
2. Шаров, Г.С. Задачи по курсу дифференциальной геометрии и топологии: Сборник задач по дифференциальной геометрии: учебное пособие для вузов /Г. С. Шаров, А. М. Шелехов, М. А. Шестакова.-М.:издательство МЦНМО,2008.-112 с.

б) Дополнительная литература:

1. Мищенко А.С. Курс дифференциальной геометрии и топологии. /А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко. - М.: Физматлит, 2000. – 448 с.
2. Краснов М. Л. Векторный анализ:Задачи и примеры с подробными решениями: Учебное пособие /М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко.- М.: УРСС, 2002.
3. Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков /Я. А. Схоутен ; пер. с англ. и доп. И. А. Кунина.-Москва: Наука,1965.
4. Победря Б. Е. Лекции по тензорному анализу:Учебное пособие для вузов/Б. Е. Победря.-М.: Издательство МГУ,1986.

6.2 Средства обеспечения освоения дисциплины.

При изучении дисциплины полезно посетить следующие Интернет-ресурсы, электронные информационные источники:

<http://www.fgosvpo.ru/index.php> - Федеральные государственные образовательные стандарты
<http://libserv.tspu.edu.ru/> - Научная библиотека Томского государственного педагогического университета

<http://www.gpntb.ru> – Государственная публичная научно-техническая библиотека России

<http://elibrary.ru> – Научная электронная библиотека,

<http://www.lib.msu.su> – научная библиотека Московского государственного университета

<http://www.lib.berkeley.edu/> - список библиотек мира в Сети

<http://ipl.sils.umich.edu> - публичная библиотека Интернет

<http://www.riis.ru> – Международная образовательная ассоциация. Задачи – содействие развитию образования в различных областях

Кроме этого в освоении дисциплины студентам помогут:

- библиотечный фонд библиотеки ТГПУ
- рабочая программа по дисциплине
- учебные тексты, предлагаемые студентам в ходе занятия
- учебный план,
- учебно-методический комплекс дисциплины.

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины.

Компьютерный класс, оборудованный компьютерами, проектором, интерактивной доской, программным обеспечением SMART Notebook для интерактивных досок, выходом в Интернет.

8. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины.

8.1 Методические рекомендации (материалы) преподавателей

1. Изучив глубоко содержание учебной дисциплины, целесообразно разработать матрицу наиболее предпочтительных методов обучения и форм самостоятельной работы студентов, адекватных видам лекционных и практических занятий.

2. Необходимо предусмотреть развитие форм самостоятельной работы, выводя студентов к завершению изучения учебной дисциплины на её высший уровень.

3. В начале семестра желательно обсудить со студентами форму самостоятельной работы, обсудить критерий ее оценивания. Пакет заданий для самостоятельной работы можно выдавать в начале семестра, определив предельные сроки их выполнения и сдачи. Задания для самостоятельной работы желательно составлять из обязательной и факультативной частей.

1. Организуя самостоятельную работу, необходимо постоянно обучать студентов методам такой работы.

2. Вузовская лекция – главное звено дидактического цикла обучения. Её цель – формирование у студентов ориентировочной основы для последующего усвоения материала методом самостоятельной работы. Содержание лекции должно отвечать следующим дидактическим требованиям:

- 1) изложение материала от простого к сложному, от известного к неизвестному;
- 2) логичность, четкость и ясность в изложении материала;
- 3) возможность проблемного изложения, дискуссии, диалога с целью активизации деятельности студентов;
- 4) опора смысловой части лекции на подлинные факты, события, явления, статистические данные;

5) тесная связь теоретических положений и выводов с практикой и будущей профессиональной деятельностью студентов.

Преподаватель, читающий лекционные курсы в вузе, должен знать существующие в педагогической науке и используемые на практике варианты лекций, их дидактические и воспитывающие возможности, а также их методическое место в структуре процесса обучения.

При изложении материала важно помнить, что почти половина информации на лекции передается через интонацию. Учитывать тот факт, что первый кризис внимания студентов наступает на 15-20-й минутах, второй – на 30-35-й минутах. В профессиональном общении исходить из того, что восприятие лекций студентами младших и старших курсов существенно отличается по готовности и умению.

Внедрение интерактивных форм обучения – одно из важнейших направлений совершенствования подготовки студентов в современном вузе. Учебный процесс, опирающийся на использование интерактивных методов обучения, организуется с учетом включенности в процесс познания всех студентов группы без исключения. Совместная деятельность означает, что каждый вносит свой особый индивидуальный вклад, в ходе работы идет обмен знаниями, идеями, способами деятельности. Организуются индивидуальная, парная и групповая работа, используется проектная работа, осуществляется работа с различными источниками информации. Интерактивные методы основаны на принципах взаимодействия, активности обучаемых, опоре на групповой опыт, обязательной обратной связи. Создается среда образовательного общения, которая характеризуется открытостью, взаимодействием участников, равенством их аргументов, накоплением совместного знания, возможностью взаимной оценки и контроля. Виды таких занятий могут быть разнообразны: обсуждение студентами проектов курсовых работ, рефератов, разбор нестандартных задач, проектно-исследовательская деятельность с защитой работ и т.д. В рамках данного курса возможны подготовленные встречи с ведущими преподавателями ТГПУ и других университетов, а также встречи с ведущими учеными с обсуждением актуальных вопросов современной математики, решением нестандартных задач.

При проведении аттестации студентов важно всегда помнить, что систематичность, объективность, аргументированность – главные принципы, на которых основаны контроль и оценка знаний студентов. Проверка, контроль и оценка знаний студента, требуют учета его индивидуального стиля в осуществлении учебной деятельности. Знание критериев оценки знаний обязательно для преподавателя и студента.

8.2. Методические рекомендации для студентов

Студентам предлагается использовать указанную литературу и методические рекомендации, разработанные сотрудниками кафедры математического анализа ТГПУ для более прочного усвоения учебного материала, изложенного на лекциях, а также для изучения материала, запланированного для самостоятельной работы. Студентам необходимо выполнить индивидуальные задания по основным темам курса. Задания, вынесенные на самостоятельную работу, проверяются преподавателем в течение семестра. Оценки за индивидуальные задания и самостоятельную работу учитываются при выставлении оценок на экзаменах.

Дополнительная литература для более детального изучения тем дисциплины:

1. Акивис М.А., Гольдберг В.В. Тензорное исчисление. М.: Физматлит, 2005. – 304 с.
2. Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. М.: Высшая школа, 1966. – 238 с.
3. Векуа И.Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов. М.: Наука, 1978. – 296 с.
4. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Наука, 1965. – 424 с.

5. Агеносов Л.Г., Няшин А.Ф. Векторный анализ (методические указания для студентов физического факультета). Тюмень: Изд-во ТюмГУ, 2003. – 48 с.
6. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: ЛКИ, 2010. - 664 с.
7. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Том 1. М.: Наука, 1973. – 492 с.
8. Френкель Я.И. Курс теоретической механики на основе векторного и тензорного анализа. М.: Либроком, 2010. – 440 с.

8. Формы текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся.

8.1 Вопросы для самопроверки:

1. Дать определение \square -символа Кронекера
2. дать определение тензора n-го ранга
3. записать правило сложения тензоров
4. записать правило умножения тензоров
5. дать определение псевдотензора
6. дать определение псевдотензора Леви – Чивиты.
7. указать, как меняется ранг тензора при его дифференцировании по скалярному аргументу
8. указать, как меняется ранг тензора при его дифференцировании по координатам радиус-вектора
9. записать оператор \square в декартовой системе координат
10. дать определение потока векторного поля
11. физический смысл дивергенции
12. сформулировать теорему Стокса для векторных полей
13. физический смысл ротора

8.2 Примерная тематика рефератов

1. Системы криволинейных координат.
2. Тороидальная система координат. Лапласиан скалярной функции.
3. Трёхмерные параболические координаты. Лапласиан скалярной функции.
4. Эллипсоидальные координаты. Лапласиан скалярной функции.
5. Параболоидальные координаты. Лапласиан скалярной функции.
6. Бицилиндрические координаты. Лапласиан скалярной функции.
7. Биполярные координаты. Лапласиан скалярной функции.
8. Параболические координаты. Лапласиан скалярной функции.
9. Конические координаты. Лапласиан скалярной функции.
10. Координаты эллиптического цилиндра. Лапласиан скалярной функции.
11. Координаты параболического цилиндра. Лапласиан скалярной функции.
12. Тороидальная система координат. Градиент скалярной функции.
13. Трёхмерные параболические координаты. Градиент скалярной функции.
14. Эллипсоидальные координаты. Градиент скалярной функции.
15. Параболоидальные координаты. Градиент скалярной функции.
16. Бицилиндрические координаты. Градиент скалярной функции.
17. Биполярные координаты. Градиент скалярной функции.
18. Параболические координаты. Градиент скалярной функции.
19. Конические координаты. Градиент скалярной функции.
20. Координаты эллиптического цилиндра. Лапласиан скалярной функции.
21. Координаты параболического цилиндра. Лапласиан скалярной функции.
22. Группа перестановок.
23. Группа Матье.
24. Преобразования пространства.


25. Точечные группы симметрии.
26. Приводимые и неприводимые представления
27. Умножение операций симметрии

8.3 Перечень вопросов к зачету:

1. Скалярные и векторные физические величины. Вектор и его числовые характеристики. Примеры.
2. Координаты вектора и его числовые характеристики в координатной форме. Примеры.
3. Линейные операции над векторами (сложение, вычитание, умножение на число) и их свойства. Примеры.
4. Множество свободных векторов, равенство векторов, нулевой вектор, углы между векторами, коллинеарные и ортогональные векторы. Примеры.
5. Линейная комбинация векторов, линейно зависимые и независимые векторы. Примеры.
6. Базис в пространстве и на плоскости, разложение вектора по базису. Ортонормированный базис, аффинный базис. Преобразование координат при переходе от одного базиса к другому. Примеры.
7. Скалярное и векторное произведения векторов и их свойства. Примеры.
8. Смешанное произведение трех векторов и его свойства. Двойное векторное произведение трех векторов и формула его вычисления. Примеры.
9. Понятие векторной функции от скалярного и векторного аргумента. Географ радиуса – вектора точки. Приращение радиуса – вектора при изменении скалярного аргумента. Примеры.
10. Скалярные поля, линии и поверхности уровня скалярного поля. Примеры.
11. Производная по направлению для скалярного поля. Определение и формула для вычисления. Примеры
12. Градиент скалярного поля. Теоремы о градиенте. Связь градиента с производной по направлению. Примеры.
13. Представление градиента через символический оператор Гамильтона. Свойства оператора "набла". Примеры.
14. Понятие векторного поля, примеры векторных полей. Векторные линии и их уравнения. Примеры.
15. Поток векторного поля через поверхность, вычисление векторного поля по определению. Инвариантная формулировка определения потока поля. Примеры.
16. Гидродинамическая интерпретация потока векторного поля через замкнутую поверхность. Физический смысл потока поля через поверхность. Примеры.
17. Различные формулы вычисления потока через поверхность. Примеры.
18. Понятие дивергенции векторного поля, как числовой характеристики поля и ее физический смысл. Источники и стоки поля. Инвариантная формулировка дивергенции векторного поля в точке. Примеры.
19. Формула Остроградского – Гаусса, координатная форма дивергенции векторного поля в точке и ее физический смысл. Представление дивергенции с помощью оператора Гамильтона. Примеры.
20. Циркуляция векторного поля вдоль линии и замкнутого контура. Физический (гидродинамический) смысл циркуляции. Примеры вычисления циркуляции.
21. Понятие ротора векторного поля через циркуляцию вдоль замкнутого контура, инвариантная формулировка ротора, определение ротора через поверхностную циркуляцию. Примеры.
22. Теорема Стокса, координатная формула ротора. Теорема о роторе. Обозначение ротора через определитель и с помощью оператора Гамильтона. Примеры.

23. Потенциальные векторные поля и их свойства. Примеры.
24. Консервативные векторные поля и их свойства. Примеры
25. Центральные векторные поля и их свойства. Примеры.
26. Соленоидальные векторные поля и их свойства, трубчатые поля. Лапласовы поля. Примеры.
27. Векторный потенциал векторного поля. Теорема Гельмгольца. Примеры.
28. Повторные операции векторного поля и их свойства. Примеры.
29. Криволинейные системы координат, преобразование координат при переходе от одной системы координат к другой. Примеры.
30. Основной и взаимный реперы, порожденные криволинейной системой координат. Разложение вектора по основному и взаимному реперам. Примеры.
31. Цилиндрическая система координат, координатные поверхности и координатные линии, основной и взаимный базисы. Примеры.
32. Сферическая система координат, координатные поверхности и координатные линии, основной и взаимный базисы. Примеры.
33. Векторные поля в криволинейной системе координат, разложение вектора поля по основному и взаимному базисам. Примеры.
34. Разложение векторного поля по цилиндрической системе координат. Коэффициенты Ламе. Примеры.
35. Разложение векторного поля по сферической системе координат, коэффициенты Ламе. Примеры.
36. Полный дифференциал и градиент скалярного поля в цилиндрической и сферической системах координат. Примеры.
37. Дивергенция векторного поля в цилиндрической и сферической системах координат. Примеры.
38. Ротор векторного поля в цилиндрической и сферической системах координат. Примеры.
39. Оператор Лапласа в цилиндрической и сферической системах координат. Примеры.
40. Преобразование координат при переходе от одной системы координат к другой. Разложение вектора по основному и взаимному базисам. Примеры.
41. Аналитическое определение вектора в криволинейной системе координат, ковариантные и контравариантные компоненты вектора и формулы их преобразования. Примеры.
42. Определение тензора второго ранга, формулы преобразования контравариантных, ковариантных и смешанных компонент тензора. Примеры.
43. Запись тензоров любой валентности и любого порядка, преобразования компонент произвольного тензора. Примеры.
44. Метрический тензор второго ранга, выражение геометрических характеристик через компоненты метрического тензора. Поднятие и опускание индексов тензоров с помощью компонент метрического тензора. Примеры.
45. Тензор Леви – Чевиты, его свойства и применение. Примеры.

Программа составлена в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по направлению 050200.62 «физико-математическое образование», профиль подготовки – физика.

Программу составил:
доктор физ.-мат. наук,
профессор кафедры математического анализа  П.М.Лавров

Программа дисциплины утверждена на заседании кафедры математического анализа
Протокол № 1 от «30» 08 20 11 г

Зав. кафедрой, д.ф.-м.н., профессор  П.М.Лавров

Программа дисциплины одобрена методической комиссией физико-математического факультета ТГПУ
Протокол № 5 от «30» 08 20 11 г

Председатель методической комиссии
физико-математического факультета, доцент  Г.К. Разина